



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 1b. Uwarunkowanie układu – przykład dwóch sprężyn

10.2025

Błąd numeryczny

$$[K]\{q\} = \{F\},$$

Odchyłki parametrów węzłowych

$$[K + \delta K]\{q + \delta q\} = \{F + \delta F\}.$$

Odchyłki sił

Błąd względny wektora globalnego parametrów węzłowych:

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \underbrace{\|[K]\| \|[K]^{-1}\|}_{cond([K])} \left(\frac{\|\{ \delta F \}\|}{\|\{F\}\|} + \frac{\|[\delta K]\|}{\|[K]\|} \right),$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$cond([K]) = \frac{\text{Zmiana rozwiązania}}{\text{Zmiana danych wejściowych}}$$

$$\text{cond}([K]) \approx 1$$

Problem dobrze uwarunkowany,

$$\text{cond}([K]) \gg 1$$

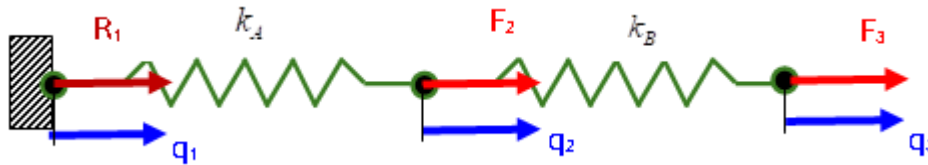
Problem źle uwarunkowany.

(duże różnice pomiędzy sztywnością elementów, niestabilne warunki brzegowe)

Norma macierzy (wektora) – miara wielkości

	Norma wektora	Norma macierzy
Norma Euklidesa $\mathbf{L}_2$	$\ \{q\}\ = \left(\sum_i (q_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	$\ [K]\ = \left(\sum_j \sum_i (k_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
Norma max $\mathbf{L}_\infty$	$\ \{q\}\ = \max_i q_i $	$\ [K]\ = \max_i \left(\sum_j k_{ij} \right)$

Przykład Dwie sprężyny



Macierz sztywności sprężyny:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$[q] = [q_1, q_2, q_3]$$

$$[F] = [R_1, F_2, F_3]$$

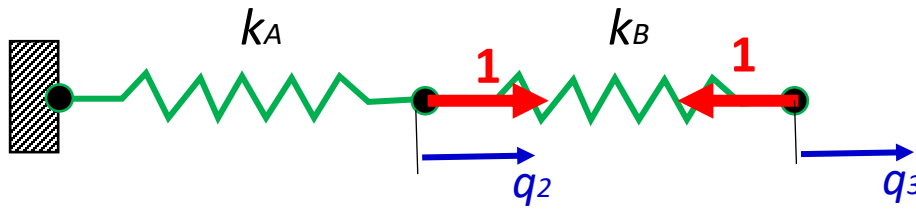
$$[K]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 \\ -k_A & k_A + k_B & -k_B \\ 0 & -k_B & k_B \end{bmatrix} + \text{Boundary Conditions } (q_1 = 0) \rightarrow \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \frac{1}{\det[K]} \cdot [K^D]^T = \frac{\begin{bmatrix} k_B & k_B \\ k_B & k_A + k_B \end{bmatrix}^T}{(k_A + k_B)k_B - (-k_B)(-k_B)} = \frac{1}{k_A \cdot k_B} \begin{bmatrix} k_B & k_B \\ k_B & k_A + k_B \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} \\ \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Założmy: $F_2 = 1 \text{ N}$, $F_3 = -1 \text{ N}$ (Siły są w równowadze)

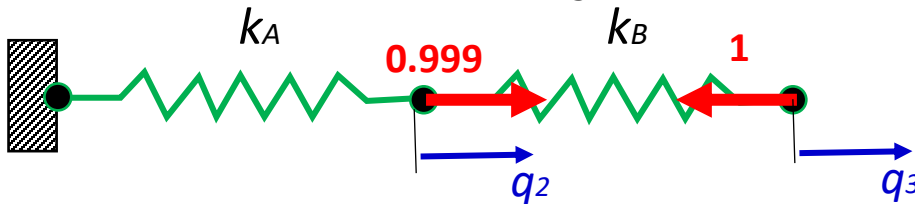


$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} \\ \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{F_2}{k_A} + \frac{F_3}{k_A} \quad (1), \quad q_3 = \frac{F_2}{k_A} + F_3 \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (2)$$

Przyjmijmy odchyłki siły:

$$\begin{cases} \delta F_2 = -0.001 \text{ N} \\ \delta F_3 = 0 \text{ N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 + \delta F_2 = 0.999 \text{ N} \\ F_3 + \delta F_3 = -1 \text{ N} \end{cases}$$



Mamy: $q_2 + \delta q_2 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + \frac{F_3 + \delta F_3}{k_A} \quad (3), \quad q_3 + \delta q_3 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + (F_3 + \delta F_3) \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (4)$

$$\delta q_2 = (q_2 + \delta q_2) - q_2 \quad (5), \quad \delta q_3 = (q_3 + \delta q_3) - q_3 \quad (6)$$

Przyjmijmy normy Euklidesa:

$$\|\{q\}\|_2 = \sqrt{q_2^2 + q_3^2}, \quad \|\{\delta q\}\|_2 = \sqrt{\delta q_2^2 + \delta q_3^2}$$

$$\|\{F\}\|_2 = \sqrt{F_2^2 + F_3^2}, \quad \|\{\delta F\}\|_2 = \sqrt{\delta F_2^2 + \delta F_3^2}$$

$$\frac{\|\{\delta q\}\|_2}{\|\{q\}\|_2} = \frac{\sqrt{\delta q_2^2 + \delta q_3^2}}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}} \quad (7),$$

$$\|[K]\|_2 = \sqrt{\sum_j \sum_i (k_{ij})^2} \quad (8),$$

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 \quad (9) \quad 5$$

Przykład wyliczenia współczynnika uwarunkowania macierzy w zadaniu ze sprężynkami:

dla: $k_A = k_B = 1000 \text{ N/mm}$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k_A & 1/k_A \\ 1/k_A & (1/k_A + 1/k_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/1000 & 1/1000 \\ 1/1000 & 2/1000 \end{bmatrix} = 1/1000 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 = 1000 \cdot \sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} \cdot 1/1000 \cdot \sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} = 7$$

dla: $k_A = 1$ i $k_B = 1000 \text{ N/mm}$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 1.001 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k_A & 1/k_A \\ 1/k_A & (1/k_A + 1/k_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 = 1000 \cdot \sqrt{(1.001^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} \cdot \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1.001^2)} = 4002$$

$$q_2 = \frac{F_2}{k_A} + \frac{F_3}{k_A} \quad (1),$$

$$q_3 = \frac{F_2}{k_A} + F_3 \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (2)$$

$$q_2 + \delta q_2 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + \frac{F_3 + \delta F_3}{k_A} \quad (3),$$

$$q_3 + \delta q_3 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + (F_3 + \delta F_3) \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (4)$$

$$\delta q_2 = (q_2 + \delta q_2) - q_2 \quad (5),$$

$$\delta q_3 = (q_3 + \delta q_3) - q_3 \quad (6)$$

$$\frac{\|\{\delta q\}\|_2}{\|\{q\}\|_2} = \frac{\sqrt{\delta q_2^2 + \delta q_3^2}}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}} \quad (7),$$

$$\|[K]\|_2 = \sqrt{\sum_j \sum_i (k_{ij})^2} \quad (8),$$

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 \quad (9),$$

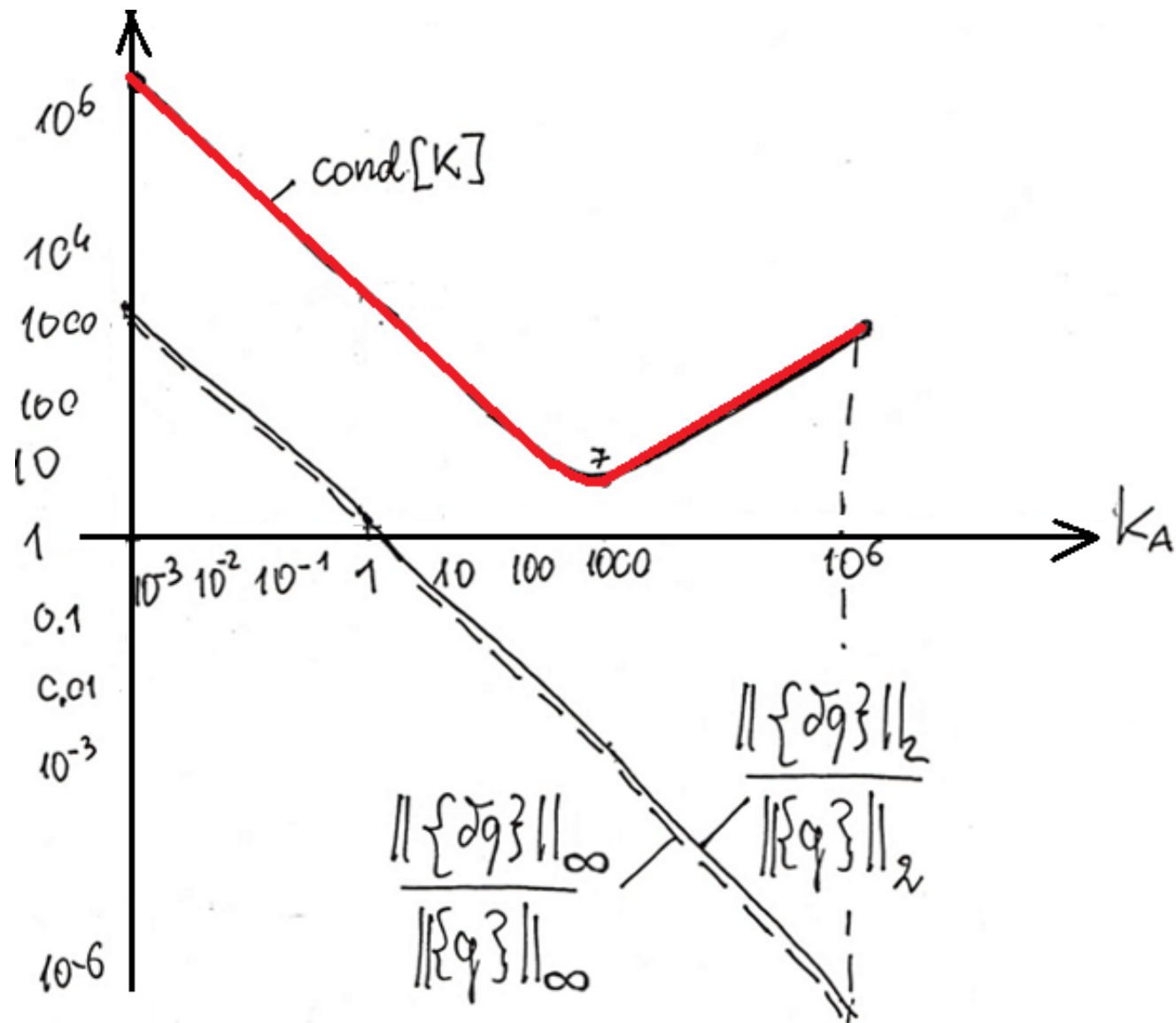
$$\text{cond}([K]) \frac{\|\{\delta F\}\|_2}{\|\{F\}\|_2} = \text{cond}([K]) \frac{\sqrt{\delta F_2^2 + \delta F_3^2}}{\sqrt{F_2^2 + F_3^2}} \quad (10)$$

(Błąd względny wektora globalnego parametrów węzłowych)

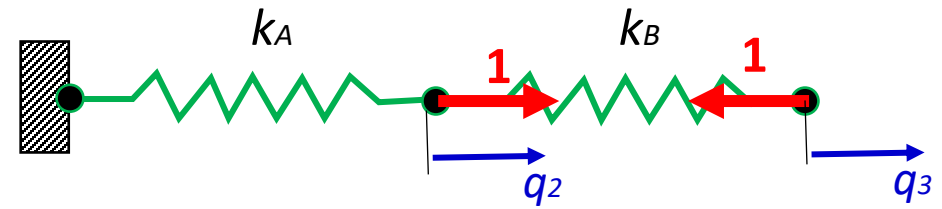
Założmy: k_A – zmienne

$k_B = 1000 \text{ N/mm}$ - stałe

k_A N/mm	q_2 mm	q_3 mm	$q_2 + \delta q_2$ mm	$q_3 + \delta q_3$ Mm	δq_2 mm	δq_3 mm	$\frac{\ \{\delta q\}\ _2}{\ \{q\}\ _2}$	$\text{cond}([K])$	$\text{cond}([K]) \frac{\ \{\delta F\}\ _2}{\ \{F\}\ _2}$
Wzór →	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(9)	(10)
0.001	0	-0.001	-1	-1.001	-1	-1	1414.21	$4 \cdot 10^6$	2828.43
1	0	-0.001	-0.001	-0.002	-0.001	-0.001	1.41	4002	2.83
1000	0	-0.001	-10^{-6}	$-1.001 \cdot 10^{-3}$	-10^{-6}	-10^{-6}	$1.41 \cdot 10^{-3}$	7	0.00495
10^6	0	-0.001	-10^{-9}	$-1.000 \cdot 10^{-3}$	-10^{-9}	-10^{-9}	$1.41 \cdot 10^{-6}$	1000	0.7



$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



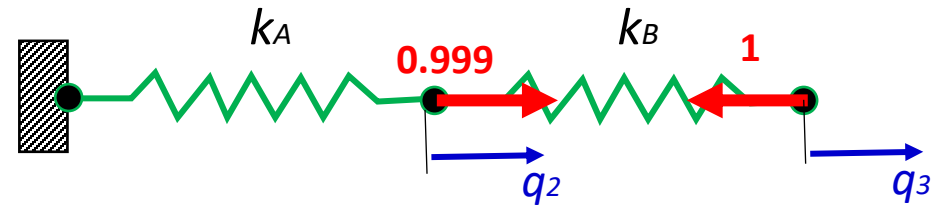
$$\begin{cases} (k_A + k_B) q_2 - k_B q_3 = F_2 \\ -k_B q_2 + k_B q_3 = F_3 \end{cases}$$



$$q_3 = \frac{k_A + k_B}{k_B} q_2 - \frac{F_2}{k_B} \quad (a)$$

$$q_3 = q_2 + \frac{F_3}{k_B} \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 + \delta F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

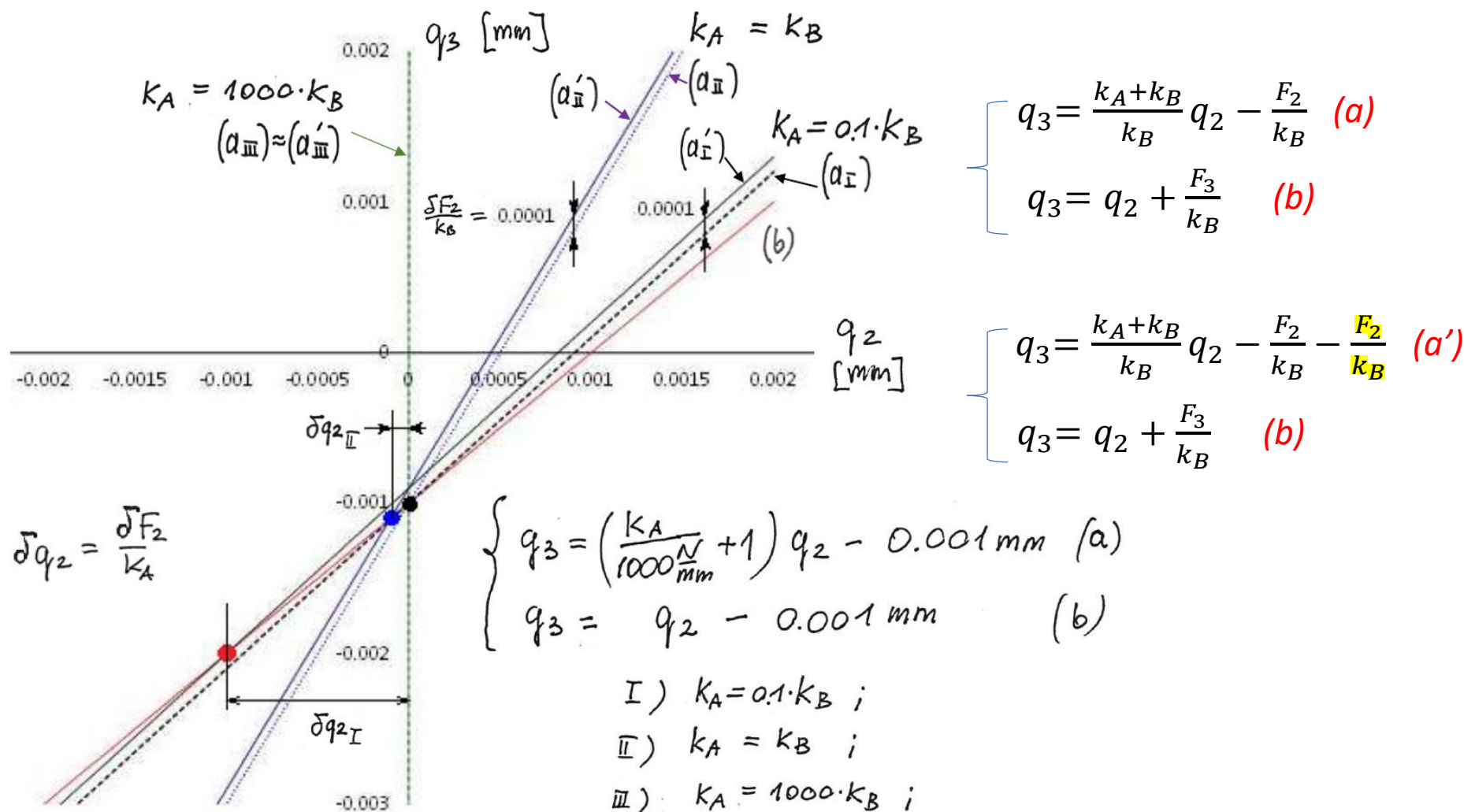


$$\begin{cases} (k_A + k_B) q_2 - k_B q_3 = F_2 + \delta F_2 \\ -k_B q_2 + k_B q_3 = F_3 \end{cases}$$



$$q_3 = \frac{k_A + k_B}{k_B} q_2 - \frac{F_2}{k_B} - \frac{\delta F_2}{k_B} \quad (a')$$

$$q_3 = q_2 + \frac{F_3}{k_B} \quad (b)$$



układ źle uwarunkowany, jeśli:

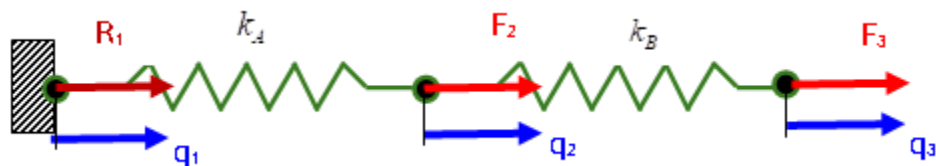
$$\frac{k_A + k_B}{k_B} \rightarrow 1 \quad \frac{k_A}{k_B} \rightarrow 0$$

Wrażliwość na zmianę nachylenia

$k_A \ll k_B$ układ źle uwarunkowany

Podsumowanie przykładu Dwie sprężyny

Układ równań:



$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Pierwsze równanie: $q_3 = \frac{k_A + k_B}{k_B} \cdot q_2 - \frac{F_2}{k_B}$

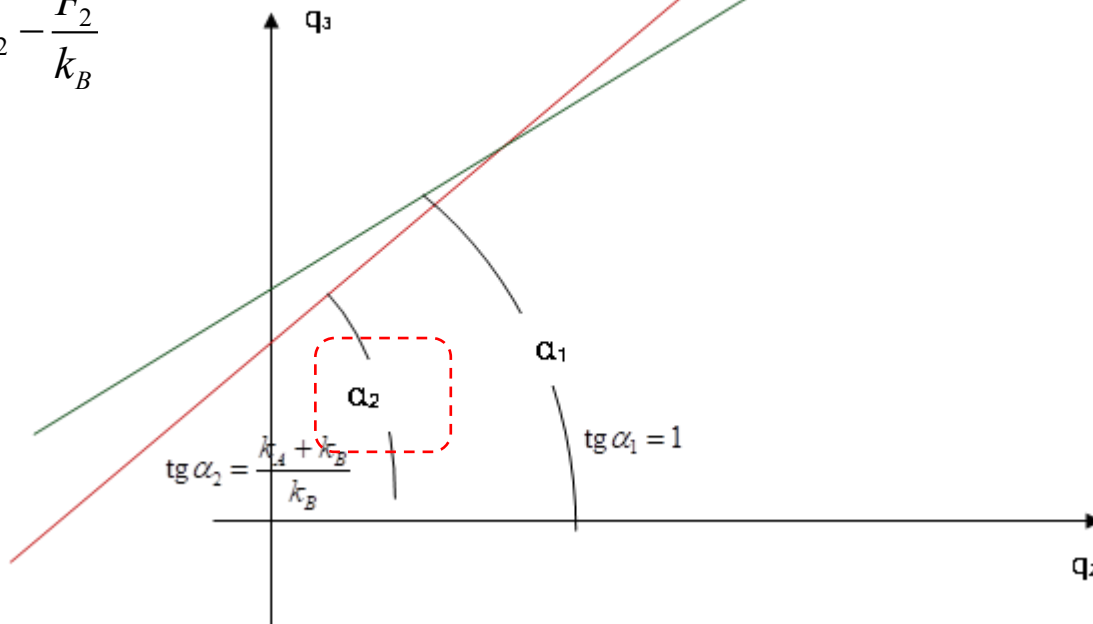
Drugie równanie: $q_3 = q_2 + \frac{F_3}{k_B}$

Układ źle uwarunkowany, jeśli:

$$\frac{k_A + k_B}{k_B} \rightarrow 1 \quad \frac{k_A}{k_B} \rightarrow 0$$

Wrażliwość na zmianę nachylenia

$k_A \ll k_B$ - system ill conditioned



Błąd zaokrąglenia

Jeżeli obliczenia prowadzone są z dokładnością do p cyfr znaczących, to liczbę cyfr znaczących w rozwiązaniu można szacować jako:

$$r \geq p - \log_{10}(\text{cond}([K]))$$

p – liczba cyfr znaczących w komputerowej reprezentacji liczb
 r – liczba cyfr znaczących wyniku

➡ Duży współczynnik uwarunkowania $\text{cond}([K])$ prowadzić może do utraty wymaganej dokładności rozwiązania (różnice w sztywności lub mało stabilne warunki podparcia).

W praktycznych zadaniach MES $\text{cond}([K])$ osiąga 10^8